SOUTIEN III

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES ET À DENSITÉ.

Variables aléatoires discrètes.

Exercice 1

Pour chacune des variables aléatoires suivantes, donner la loi, les moments d'ordre 1, 2 et 3, puis l'espérance et la variance. Enfin, écrire un programme Python qui simule ces variables aléatoires.

1. X_1 est le nombre de piles obtenus en lançant 4 pièces de monnaie.

2. X_2 est le minimum de deux dés à 6 faces.

3. X_3 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche (on tire une sans remise des boules dans une urne contenant 4 boules noires et deux boules blanches).

4. X_4 est le produit de 4 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

5. Y_1 est le nombre de piles obtenus en lançant n pièces de monnaie.

6. Y_2 est le le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche lors de tirages sans remise dans une urne qui contient n boules noires et une boule blanche.

Variables à densités.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leqslant x \leqslant \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f comme densité.

- **a.** Calculer la fonction de répartition F de X.
- **b.** Calculer l'espérance et la variance de X (attention, beaucoup de calculs !).
- **c.** À l'aide du graphe de f, conjecturer une relation entre $\mathbb{P}([X \leqslant -x])$ et $\mathbb{P}([X \geqslant x])$, pour tout $x > 0$, puis la démontrer. Exprimer cette relation à l'aide de la fonction F.

Théorème de transfert.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Utilisation de la formule des probas totales.

Exercice 4

Énoncer la formule des probas totales. Dans quel(s) type(s) d'expérience(s) aléatoire(s) est-on sûr de devoir l'utiliser. Donner un exemple de telles situations.